

Marius Burtea Georgeta Burtea

Cornelia Bascău, Anișoara Blănaru, Silvia Brabeceanu, Mihaela Brânzea, Carmen Călinescu, Ruxandra Cristea, Răzvan Cristescu, Marijana Dragomir, Georgiana Dumitru, Beatrice Ioniță, Marieta Mărtoiu, Adriana Moraru, Tudorîa Neagoe, Paula Nica, Gabriela Nistor, Daniela Soare, Felix Tuinete, Mariana Urziceanu, Sergiu Vaicăr

CLASA a X-a

MATEMATICĂ

Probleme și exerciții Teste

semestrul I

- mulțimi de numere
- funcții
- ecuații

servicii, resurse, tehnici

CAMPION

CUPRINS

Capitolul I. MULTIMI DE NUMERE

1. NUMERE REALE	5
1.1. Radicalul de ordin n dintr-un număr rațional, $n \in \{2, 3\}$. Proprietăți	5
1.2. Operații cu radicali	12
1.3. Puteri cu exponent număr rațional. Puteri cu exponent real.....	16
Teste de evaluare.....	20
1.4. Logaritmul unui număr real pozitiv	20
Teste de evaluare.....	24
2. MULTIMEA NUMERELOR COMPLEXE.....	25
2.1. Forma algebrică a unui număr complex. Conjugatul unui număr complex.....	25
2.2. Operații cu numere complexe.....	27
2.3. Rezolvarea în \mathbb{C} a ecuației de gradul 2 cu coeficienți numere reale. Ecuații bipătrate.....	31
Teste de evaluare.....	34

Capitolul II. FUNCȚII ȘI ECUAȚII

1. FUNCȚII	36
1.1. Funcții injective, funcții surjective, funcții bijective.....	36
1.2. Componerea funcțiilor	40
1.3. Funcții inversabile. Inversa unei funcții	42
1.4. Funcția putere cu exponent natural. Funcția radical.....	45
1.5. Funcția exponentială	48
1.6. Funcția logaritmică	56
1.7. Funcții trigonometrice.....	55
1.8. Funcții trigonometrice inverse	64
Teste de evaluare.....	67
2. ECUAȚII	69
2.1. Ecuații iraționale cu radicali de ordin 2 sau 3	69
2.2. Ecuații exponențiale.....	71
2.3. Ecuații logaritmice	73
Teste de evaluare	75

Indicații și răspunsuri	77
-------------------------------	----

Bibliografie	97
--------------	----

MULTIMI DE NUMERE

NUMERE REALE.

1.1 RADICALUL DE ORDIN n DINTR-UN NUMĂR RAȚIONAL, $n \in \{2, 3\}$.

PROPRIETĂȚI.

Breviar teoretic

- Radicalul de ordinul 2 dintr-un număr real pozitiv.**

Se numește radicalul de ordinul 2 dintr-un număr real pozitiv x , numărul real pozitiv a cărui putere a două este egală cu x .

Se notează $\sqrt[2]{x}$ sau \sqrt{x} .

Au loc relațiile: $\sqrt{x} \geq 0$ și $(\sqrt{x})^2 = x$, $\forall x \in (0, +\infty)$ și $\sqrt{y^2} = |y|$, $\forall y \in \mathbb{R}$. $\sqrt{0} = 0$.

Exemple: a) $\sqrt{4} = 2$; b) $\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$; c) $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$; d) $\sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{3}{10}$.

- Radicalul de ordin 3 al unui număr real.**

Se numește radicalul de ordinul 3 al numărului real x , numărul real a cărui putere a treia este egală cu numărul x . Se notează $\sqrt[3]{x}$.

Au loc relațiile: $\sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ și $(\sqrt[3]{x})^3 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple:

- $\sqrt[3]{8} = 2$, deoarece $2^3 = 8$.
- $\sqrt[3]{-1} = -1$, deoarece $(-1)^3 = -1$.
- $\sqrt[3]{-0,125} = -0,5$, deoarece $(-0,5)^3 = -0,125$.
- $\sqrt[3]{-\frac{27}{64}} = -\frac{3}{4}$, deoarece $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}$.

- Proprietăți ale radicalilor:**

1. Radicalul produsului

a) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $a, b \in [0, +\infty)$;

$$\sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} \cdot \dots \cdot \sqrt{a_k}, \quad a_1, a_2, \dots, a_k \in [0, +\infty).$$

b) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$;

$$\sqrt[3]{b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n} = \sqrt[3]{b_1} \cdot \sqrt[3]{b_2} \cdot \dots \cdot \sqrt[3]{b_n}, \quad b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}.$$

2. Puterea unui radical

a) $(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m}$, $a \in [0, +\infty)$, $m \in \mathbb{N}$;

b) $(\sqrt[3]{a})^m = \sqrt[3]{a^m}$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

3. Radicalul unui raport

a) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \in [0, +\infty)$, $b \in (0, +\infty)$;

b) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

4. Scoaterea unui factor de sub radical

a) $\sqrt{a^{2k} \cdot b} = |a|^k \cdot \sqrt{b}$, $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$;

b) $\sqrt[3]{a^{3k} \cdot b} = a^k \sqrt[3]{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5. Compararea radicalilor

a) Dacă $a, b \in [0, +\infty)$ atunci $\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leq b$;

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt[3]{a} \leq \sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a \leq b$.

Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se calculeze:

a) $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{(-5)^4}$; $\sqrt{\frac{36}{49}}$; $\sqrt{0,04}$. b) $\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[3]{-7^3}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{-1}{1000}}$.

a) Avem: $\sqrt{3^6} = \sqrt{(3^3)^2} = 3^3 = 27$; $\sqrt{(-5)^4} = (-5)^2 = 25$; $\sqrt{\frac{36}{49}} = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2} = \frac{6}{7}$;
 $\sqrt{0,04} = \sqrt{(0,2)^2} = 0,2$.

b) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$; $\sqrt[3]{-7^3} = -7$.

$$\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \frac{4}{3}; \quad \sqrt[3]{\frac{-1}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{-1}{10}\right)^3} = -\frac{1}{10}.$$

2. Se dă numerele reale: $a = |-2^2| + \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ și $b = \sqrt{9-4\sqrt{5}}$. Arătați că:

a) $a \in \mathbb{N}$ b) $b - \sqrt{5} < 0$;

a) Numărul a se scrie sub forma mai simplă astfel:

$$a = 4 + |1 - \sqrt{3}| + |2 - \sqrt{3}| = 4 + \sqrt{3} - 1 + 2 - \sqrt{3} = 5. \text{ Așadar, } a \in \mathbb{N}.$$

b) Se observă că $9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2$. Rezultă că $b = |2 - \sqrt{5}| = -2 + \sqrt{5}$, iar
 $b - \sqrt{5} = (-2 + \sqrt{5}) - \sqrt{5} = -2$. Așadar, $b - \sqrt{5} < 0$.

3. Să se calculeze:

a) $\sqrt{81 \cdot 625 \cdot 144}$; b) $\sqrt[3]{4^6 \cdot (-1)^5 \cdot 27}$; c) $\sqrt[3]{\frac{729}{64^2 \cdot (-1)^4}}$.

a) Avem $\sqrt{81 \cdot 625 \cdot 144} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{625} \cdot \sqrt{144} = 9 \cdot 25 \cdot 12 = 2700$.

b) $\sqrt[3]{4^6 \cdot (-1)^5 \cdot 27} = \sqrt[3]{4^6} \cdot \sqrt[3]{(-1)^5} \cdot \sqrt[3]{27} = 4^2 \cdot (-1) \cdot 3 = -48$.

c) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{729}{64^2 \cdot (-1)^4}}} = \sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$.

4. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care sunt definite expresiile:

a) $\sqrt{6x+2}$; b) $\sqrt{2x^2+5x-3}$; c) $\sqrt{9-x^2} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-2}}$.

a) Se pune condiția de existență a radicalului de ordinul 2: $6x + 2 \geq 0$. Se obține succesiv:

$$6x \geq -2 \Rightarrow x \geq \frac{-2}{6} \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty \right).$$

b) Se pune condiția de existență $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$. Se rezolvă ecuația de gradul doi

$$2x^2 + 5x - 3 = 0 \text{ obținându-se } \Delta = 49 \text{ și } x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}.$$

Din tabelul de semn

x	$-\infty$	-3	$1/2$	$+\infty$
$2x^2 + 5x - 3$	+	++	0	- - 0 + + +

se obține soluția $x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) Condițiile de existență pentru cei doi radicali sunt: $9 - x^2 \geq 0$, respectiv

$x \in \mathbb{R}$, $x - 2 \neq 0$ (condiția de existență a fracției). Se obține $x \in [-3, 3]$ și $x \neq 2$, adică $x \in [-3, 3] \setminus \{2\}$.

Exerciții și probleme propuse

Exersare

1. Să se calculeze:

$$\text{a) } \sqrt{5^8}; \sqrt{(-4)^6}; \sqrt{\frac{121}{625}}; \sqrt{1,(7)}; \sqrt{2,25}; \sqrt{0,0001}; \sqrt{\frac{x^4}{y^6}}, y \neq 0; \sqrt{\frac{2^5 \cdot b^3}{a^4}}, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}_+;$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-27}; \sqrt[3]{64}; \sqrt[3]{\frac{125}{8}}; \sqrt[3]{-\frac{64}{1000}}; \sqrt[3]{-0,216}; \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^6}}, y \neq 0; \sqrt[3]{\frac{8a^7b^4}{27c^6}}, a,b,c \in \mathbb{R}, c \neq 0.$$

2. Să se calculeze următorii radicali:

a) $\sqrt[3]{216}$; b) $\sqrt[3]{-512}$; c) $\sqrt[3]{0,027}$; d) $\sqrt[3]{\frac{729}{125}}$; e) $\sqrt[3]{-\frac{125}{64}}$; f) $\sqrt[3]{-0,001}$; g) $\sqrt[3]{(ab)^5}$.

3. Să se calculeze următorii radicali folosind proprietățile radicalilor:

$$\text{a) } \sqrt{3^4 \cdot 5^2}; \quad \text{b) } \sqrt{4^6 \cdot 7^4}; \quad \text{c) } \sqrt{0,4^2 \cdot (1,44)^4}; \quad \text{d) } \sqrt{(7^2)^3}; \quad \text{e) } \sqrt{\frac{25^4}{7^6}}; \quad \text{f) } \sqrt{\left(\frac{5}{11}\right)^3}^4.$$

4. Să se calculeze următorii radicali folosind proprietățile radicalilor:

$$\text{a) } \sqrt[3]{5^3 \cdot 11^6}; \quad \text{b) } \sqrt[3]{8^6 \cdot 7^3}; \quad \text{c) } \sqrt[3]{-10^6 \cdot (-2)^3}; \quad \text{d) } \sqrt[3]{\frac{(-7)^9}{15^6}}; \quad \text{e) } \sqrt[3]{\frac{-(4^3)^2}{7^9}}; \quad \text{f) } \sqrt[3]{a^3 b^6 c^9}.$$

5 Să se scoată factorii de sub radical :

a) $\sqrt{75}; \sqrt{243}; \sqrt{\frac{108}{121}}; \sqrt{\frac{48 \cdot 125}{49}}, a > 0, b \in \mathbb{R}; \sqrt{2^3(-a^3)(-b)^5}, a < 0, b < 0;$

b) $\sqrt[3]{54}; \sqrt[3]{-1875}; \sqrt[3]{\frac{(-2)^4 \cdot 3^5}{5^3}}; \sqrt[3]{\frac{(-8)^2 \cdot 625}{-27}}; \sqrt[3]{\frac{a^3 b^4}{-c^6}}, c \neq 0.$

6. Să se compare numerele:

a) $2\sqrt{3}, 3\sqrt{2};$ b) $\sqrt{8}, \sqrt[3]{8};$ c) $4\sqrt[3]{3}, 3\sqrt[3]{4};$ d) $\sqrt{27}, \sqrt[3]{81};$

e) $\frac{3}{4}, \frac{1}{\sqrt{5}-2};$ f) $1, \frac{1}{2-\sqrt{5}};$ g) $0, \frac{1}{1-\sqrt{2}};$ h) $\sqrt{224}+15, \sqrt{900};$

i) $\sqrt{\frac{9}{25}}, \sqrt[3]{\frac{27}{125}};$ j) $\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2}, \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{4}\right)^3};$ k) $(2\sqrt{2})^{90}, 8^{48}.$

7. Să se determine mulțimile $A \cap B, A \cup B, A - B$ în următoarele cazuri:

a) $A = (-\infty, \sqrt{2} + \sqrt{3}), B = (3, \infty);$ b) $A = (-\sqrt{3} + 1, 2 + \sqrt{3}), B = (2 - \sqrt{3}, 2);$

c) $A = (3 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}], B = [\sqrt{2}, \sqrt{5} + 1);$ d) $A = (1 - \sqrt[3]{3}, 2 + \sqrt{2}), B = (\sqrt{3}, 7 - \sqrt[3]{2});$

e) $A = (-\sqrt{2}, 3), B = (1 - \sqrt{5}, \sqrt{2} + \sqrt{3});$ f) $A = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}, 4\right), B = \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2}, 2\sqrt{3}\right).$

8. Să se compare următorii radicali:

a) $\sqrt{15}$ și $\sqrt{51};$ b) $\sqrt{3}$ și $\sqrt[3]{3};$ c) $\sqrt{9}$ și $\sqrt[3]{27};$ d) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ și $\sqrt[3]{0,064}.$

9. a) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție strict crescătoare, să se studieze semnul expresiilor:

i) $f(\sqrt{2}) - f(2,5);$ ii) $f(\sqrt[3]{9}) - f(2);$ iii) $f(\sqrt[3]{5}) - f(\sqrt{5}).$

b) Dacă $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție strict descrescătoare, să se compare cu 1 rapoartele:

i) $\frac{f(0)}{f(\sqrt{2} - \sqrt{3})};$ ii) $\frac{f(3)}{f(2\sqrt{2})};$ iii) $\frac{f(\sqrt[3]{3})}{f(2)}.$

c) Dacă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție strict descrescătoare, să se scrie în ordine crescătoare numerele:

i) $f(\sqrt{2}), f(\sqrt{3}), f\left(\frac{3}{2}\right);$ ii) $f(1 - \sqrt[3]{2}), f(0), f(\sqrt{2});$ iii) $f(2 - \sqrt[3]{2}), f(1), f(1 + \sqrt{2}).$

10. a) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor:

i) $4\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{81}, 6\sqrt[3]{3};$ ii) $5\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{128};$ iii) $9\sqrt{5}, 8\sqrt{15}, 25\sqrt{3}.$

b) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor reale a și b care verifică relația:

i) $(a - \sqrt{3} - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 0;$ ii) $(a - \sqrt[3]{2} + 1)^2 + (b - \sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2} - 1)^2 = 0.$

11. Să se calculeze:

a) $|2\sqrt{2} - 3| + 3|1 - \sqrt{2}| + 5|-3\sqrt{2}|;$ b) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 5\sqrt{2})^2} + 3\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2} - \sqrt{(6 - 2\sqrt{3})^2};$

c) $|2\sqrt{2} - 2| + 3|-\sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}|;$ d) $|4\sqrt{3} + |2 - 2\sqrt{3}|| - |2 + \sqrt{108}|;$

e) $|\sqrt{1} - \sqrt{2}| + |\sqrt{2} - \sqrt{3}| + \dots + |\sqrt{99} - \sqrt{100}|$; f) $|\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{3}| + |\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5}| + \dots + |\sqrt[3]{123} - \sqrt[3]{125}|$.

12. Să se determine x pentru care există expresiile:

a) $\frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x-2}}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1-2x}{1+2x}}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}-3}}$;

b) $\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x+4}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{x}{|x|-8}}$; f) $\sqrt{-x^2+7x-10} - \sqrt[3]{\frac{1}{x-3}}$.

13. Să se determine valorile întregi ale lui x pentru care sunt definite expresiile :

a) $E(x) = \sqrt{-5x^2 - 2x + 7}$; b) $E(x) = \sqrt{9-x^2} + \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-3}}$;

c) $E(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x}} - \sqrt{x+1}$; d) $E(x) = \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} + \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$.

14. Să se scrie fără radicali expresiile:

a) $|x^2 + 1| - \sqrt{(5x-1)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$, unde $x \in (-\infty, 0)$;

b) $\sqrt{4a^2} - \sqrt{\frac{b^2}{(-3)^2}} + \sqrt{(3a+1)^2} - \sqrt{(b-2a)^2}$, unde $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

15. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

a) $E(x) = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{(x+3)^2}$, $x \in (-3; 2)$; b) $E(x) = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x+5)^2}$, $x \in (-5; -2)$;

c) $E(x) = \sqrt{(-x^2+3x-2)^2} + \sqrt{x^2}$, $x \in (1; 2)$; d) $E(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3} - \sqrt{(1-x)^2}$, $x > 1$;

e) $E(x) = |x-4| + \sqrt{x^2} - 2\sqrt{(x-2)^2}$, $x \in (2; 4)$; f) $E(x) = \sqrt{(x-5)^4} - \sqrt{(9-x^2)^2}$, $x \in (3; \infty)$.

Aprofundare

16. Să se determine multimiile de numere: $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\frac{18}{x-2}} \in \mathbb{N} \right\}$;

$B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} \in \mathbb{N} \right\}$; $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{\frac{16}{x-1}} \in \mathbb{N} \right\}$; $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt[3]{\frac{6x+12}{2x-1}} \in \mathbb{Z} \right\}$.

17. Să se determine multimiile :

a) $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{4-x} \in \mathbb{N} \right\}$; b) $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt[3]{12-x} \in \mathbb{N} \right\}$;

c) $C = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \sqrt{\frac{12-4x}{x+6}} \in \mathbb{N} \right\}$; d) $D = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt[3]{\frac{4-2x}{x+3}} \in \mathbb{N} \right\}$.

18. a) Să se scrie expresiile ca un cât de radicali :

i) $\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ pentru $x < -1$; ii) $\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$, pentru $x \in (-2, 3)$; iii) $\sqrt{(x-1)(x+1)}$, pentru $x < -1$.

b) Să se determine valorile reale ale lui x pentru care au loc egalitățile :

i) $\sqrt{x(x+1)} = \sqrt{x}\sqrt{x+1}$; ii) $\sqrt{x(x-1)} = \sqrt{-x}\sqrt{-x+1}$;

iii) $\sqrt{\frac{x+1}{2-x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2-x}}$; iv) $\sqrt{\frac{2-x}{3-x}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-3}}$.

c) În ce condiții funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : D' \rightarrow \mathbb{R}$ sunt egale, dacă :

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{\frac{5-x}{4-x}} \text{ si } g(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x-4}} ; \quad \text{ii) } f(x) = \sqrt{2x(-3x-1)} \text{ si } g(x) = \sqrt{-2x}\sqrt{3x+1} .$$

19. Să se calculeze partea întreagă a numerelor :

a) $\sqrt{24}$; b) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; c) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

d) $\sqrt{6}$; e) $\sqrt{6+\sqrt{6}}$; f) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$;

g) $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3}}}$: h) $\sqrt[3]{2+\sqrt{8}}$: i) $\sqrt[3]{10+\sqrt[3]{10}}$

20. Fie expresia $E(n) = \sqrt{1+3+5+\dots+(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze $E(3)$, $E(4)$, $E(5)$. Ce observați?

b) Să se calculeze $E(25)$.

c) Să se verifice dacă $E(n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

21. a) Să se demonstreze că $3 - 2\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $6 \mid 4^a + b$.

b) Să se determine $a, b \in \mathbb{N}$, astfel încât $6 - 4\sqrt{2} = (a - b\sqrt{2})^2$.

c) Fie expresia $E = \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{6-4\sqrt{2}}$. Să se verifice dacă $E \in \mathbb{N}$.

22. Fie mulțimea $A = \{a + b\sqrt{3} / a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că $x, y \in A$ iar apoi să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor x și y , în cazurile:

a) $x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ și $y = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$; b) $x = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ și $y = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$;

c) $x = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$ si $y = \sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$; d) $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$ si $y = \sqrt{28 + 10\sqrt{3}}$

23. Să se precizeze valoarea de adevăr a propozițiilor :

a) $E = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2(2+\sqrt{3})} \in \mathbb{N}$; b) $E = \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{11-6\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$;

c) $E = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-2} \in \mathbb{Q}$.

a) Să se demonstreze că $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se calculeze partea întreagă a numărului $E(3)$.

b) Să se calculeze partea întreagă a numărului $E(3)$.

c) Să se demonstreze că $E(n) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

d) Să se calculeze valoarea de adevăr a propoziției $E(2024) \in \mathbb{Q}$.

e) Să se demonstreze că $E(n) > 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

25. Se dă expresiile $F(n) = \left\lceil \sqrt{n^2 + 1} \right\rceil + \left\lceil \sqrt{n^2 + 2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \sqrt{n^2 + 2n} \right\rceil$ și

$$E(n) = \left\lceil \sqrt{1} \right\rceil + \left\lceil \sqrt{2} \right\rceil + \dots + \left\lceil \sqrt{n} \right\rceil, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Să se arate că $n^2 \leq n^2 + k < (n+1)^2$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n$.
- Să se verifice valoarea de adevăr a afirmației: $\left\lceil \sqrt{n^2 + k} \right\rceil = n$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2n$.
- Să se demonstreze că $F(n) = 2n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se calculeze $E(9)$.
- Să se calculeze $E(49)$.

26. Fie expresiile $A(n) = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}$, $n \geq 2$ și

$$E(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}}} \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}} \cdot \dots \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}}.$$

- Să se demonstreze că $\frac{1}{\sqrt{k-1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
- Să se arate că $(\sqrt{n} + 1)A(n) \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Să se calculeze partea întreagă și partea fracționară a numărului $A(101)$.
- Să se verifice dacă $E(x) = x^{A(100)}$, $\forall x > 0$.
- Să se calculeze numărul $E\left(\sqrt[3]{E(4)}\right)$.

27. a) Să se demonstreze că $n+1 \leq \sqrt{n(n+3)} < n+2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) Să se calculeze suma $S = \left\lceil \sqrt{2 \cdot 5} \right\rceil + \left\lceil \sqrt{3 \cdot 6} \right\rceil + \left\lceil \sqrt{4 \cdot 7} \right\rceil + \dots + \left\lceil \sqrt{2010 \cdot 2013} \right\rceil$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x . (Concurs de matematică aplicată "A. Haimovici", 2011, etapa Județeană)

28. Fie punctele $O(0,0)$ și $P_1(1,0)$. Pentru fiecare valoare $n \in \mathbb{N}^*$, construim triunghiul OP_nP_{n+1} , dreptunghic în P_n , cu cateta P_nP_{n+1} de lungime 1, având interioarele disjuncte două câte două (vezi figura 1, "Spirala radicalilor")

- Construiți punctele P_2 , P_3 , P_4 (conform algoritmului menționat) și calculați lungimile laturilor OP_2 , OP_3 , OP_4 . Ce observați?
- Verificați dacă lungimea segmentului OP_9 este un număr rațional.
- Stabiliti valoarea de adevăr a afirmației: "Lungimea segmentului OP_n este egală cu \sqrt{n} , $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ".
- Calculați cardinalul mulțimii A , unde:

$$A = \left\{ a \in \mathbb{Q} \mid a \text{ este lungimea segmentului } OP_n, \text{ pentru } n \in \mathbb{N}^*, n \leq 16 \right\}.$$

